

苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由*

五次方程式经 Abel, Galois 之证明后, 一般算学者均认为不可以代数解矣, 而《学艺》七卷十号载有苏君之“代数的五次方程式之解法”一文, 罗欣读之而研究之, 于去年冬亦仿得“代数的六次方程式之解法”矣. 罗对此欣喜异常, 意为果能成立, 则于算学史中亦可占一席之地也, 惟自思若不将 Abel 言论驳倒, 终不能完全此种理论, 故罗沉思于 Abel 之论中, 凡一阅月, 见其条例精严, 无懈可击, 后经本社编辑员之暗示, 遂从事于苏君解法确否之工作, 于六月中遂得其不能成立之理由, 罗安敢自秘, 特公之于世, 尚祈示正焉.

解法简述

用 Sylvester 之分离消去法 (diabylic method of elemination) 将普通形

$$x^5 + p_1x^4 + p_2x^3 + p_3x^2 + p_4x + p_5 = 0$$

化为可解形 $X^5 + P_1X^4 + P_2X^3 + P_3X^2 + P_4X + P_5 = 0$ (中有 $P_1 = 0, P_3 = 0, P_2^2 = 5P_4$), 而 x, X 有 $X = n_0 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 + n_4x^4$ 之关系. P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 为 n_0, n_1, n_2, n_3, n_4 之一次、二次、三次、四次、五次齐次函数, $P_1 = 0$, 即 n_0 可以 n_1, n_2, n_3, n_4 之一齐次函数表之, 以之代入 P_2, P_3, P_4, P_5 , 则得 n_1, n_2, n_3, n_4 之二、三、四、五次齐次函数, 而 P_3 之一般形可写为

$$\begin{aligned} & A_1n_1^3 + A_2n_2^3 + A_3n_3^3 + A_4n_4^3 + A_5n_1^2n_2 + A_6n_1^2n_3 + A_7n_1^2n_4 + A_8n_2^2n_1 + A_9n_2^2n_3 \\ & + A_{10}n_2^2n_4 + A_{11}n_3^2n_1 + A_{12}n_3^2n_2 + A_{13}n_3^2n_4 + A_{14}n_4^2n_1 + A_{15}n_4^2n_2 + A_{16}n_4^2n_3 \\ & + A_{17}n_1n_2n_3 + A_{18}n_1n_2n_4 + A_{19}n_1n_3n_4 + A_{20}n_2n_3n_4, \end{aligned} \quad (I)$$

式中 A_1, \dots, A_{20} 为 p_1, \dots, p_5 之函数为已知者.

若令等于下式

$$\begin{aligned} & (a_1n_1 + a_2n_2)(a_3n_1^2 + a_4n_2^2 + a_5n_3^2 + a_6n_4^2 + a_7n_1n_2 + a_8n_1n_3 + a_9n_1n_4 + a_{10}n_2n_3 \\ & + a_{11}n_2n_4 + a_{12}n_3n_4) + (a_{13}n_3 + a_{14}n_4)(a_{15}n_1^2 + a_{16}n_2^2 + a_{17}n_3^2 + a_{18}n_4^2 + a_{19}n_1n_2 \\ & + a_{20}n_1n_3 + a_{21}n_1n_4 + a_{22}n_2n_3 + a_{23}n_2n_4 + a_{24}n_3n_4), \end{aligned} \quad (II)$$

式中 a_1, \dots, a_{24} 为未定系数.

* 科学, 1930, 15: 307-309.

再设 $a_1 n_1 + a_2 n_2 = 0$, $a_{13} n_3 + a_{14} n_4 = 0$, 代入 $P_2^2 = 5P_4$ 式中, 则此式为 n_2, n_4 之四次齐次函数, 解之, 则得 n_2, n_4 之比值, 由此可作得 $n_0 : n_1 : n_2 : n_3 : n_4$ 之值, 故普通形可化为上之可解形, 换言之, 即五次方程式可得而解矣.

谬 误 点

罗研究上意知其谬误在 P_3 中, 即 (I) 不能等于 (II) 也. 夫求未定系数 a_1, \dots, a_{24} , 原文亦有求之之二十方程式, 罗为便利讨探计, 特分之为四类, 转录于下:

$$(一) a_1 a_3 = A_1,$$

$$a_3 a_2 + a_1 a_7 = A_5,$$

$$(二) a_{13} a_{17} = A_3,$$

$$a_{17} a_{14} + a_{13} a_{24} = A_{13},$$

$$(三) a_{13} a_{15} + a_1 a_3 = A_6,$$

$$a_1 a_{11} + a_2 a_9 = a_{18} - a_{14} a_{19},$$

$$a_2 a_{10} + a_{13} a_{16} = A_9,$$

$$(四) a_1 a_5 + a_{13} a_{20} = A_{11},$$

$$a_2 a_{12} + a_{14} a_{22} = A_{19} - a_{13} a_{23},$$

$$a_1 a_6 + a_{14} a_{21} = A_{14},$$

$$a_2 a_4 = A_2,$$

$$a_4 a_1 + a_2 a_7 = A_8;$$

$$a_{14} a_{18} = A_4,$$

$$a_{18} a_{13} + a_{14} a_{24} = A_{16};$$

$$a_{14} a_{15} + a_1 a_9 = A_7,$$

$$a_2 a_{11} + a_{14} a_{16} = A_{10},$$

$$a_1 a_{10} + a_2 a_8 = a_{17} - a_{13} a_{19};$$

$$a_2 a_5 + a_{13} a_{22} = A_{12},$$

$$a_1 a_{12} + a_{13} a_{21} = A_{20} - a_{14} a_{20},$$

$$a_2 a_6 + a_{14} a_{23} = A_{15}.$$

依原所谓假 a_7, a_{24} 则由 (一), (二) 得 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_{13}, a_{14}, a_{17}, a_{18}$ 之值, 则第二类乃为 $a_8, a_{16}, a_9, a_{11}, a_{16}, a_{10}$ 之联立一次方程式 (设 a_{19} 为已知), 以行列式解之, 知其各分母悉为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{14} & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_2 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}.$$

然

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{14} & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_2 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_{14} & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$-a_{13} \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_2 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = 0,$$

而 $a_8, a_{15}, a_9, a_{11}, a_{16}, a_{10} = \delta/\Delta$.

因 $\Delta = 0$, 故 $a_8, a_{15}, a_9, a_{11}, a_{16}, a_{10}$ 非不定即无限大, 故 (I) 等 (II) 之谬论不攻自破矣. 换言之, 即 P_3 为零不能解得二次式, 故此法亦不能解五次方程式也.

